ZORRO

Profesor
Edson Curahua

PITAGORAS
ACADEMIA

GEOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

CLASE 10: ÁREA CUADRANG. Y CIRCULARES

ÁREA DE REGIONES CUADRANGULARES

FÓRMULAS BÁSICAS

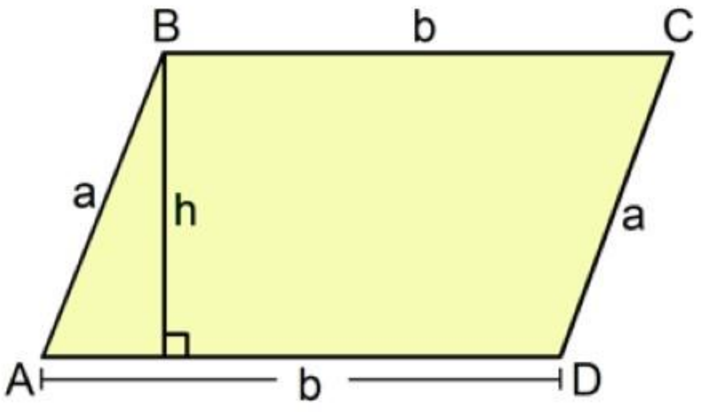
PROPIEDADES

ÁREA DEL CÍRCULO Y SUS PARTES

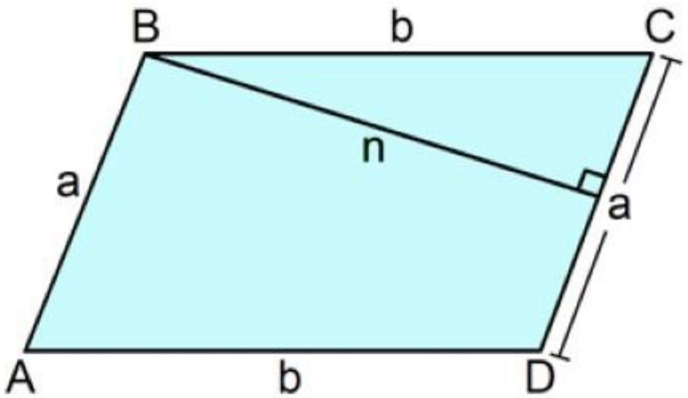
PROPIEDADES

ÁREA DE REGIONES CUADRANGULARES

01.- DE UN PARALELOGRAMO

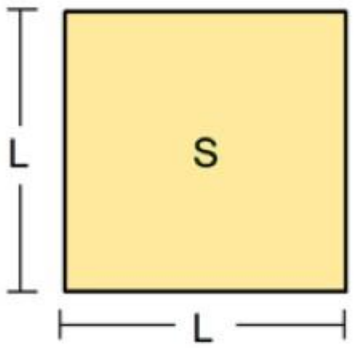


$$S_{ABCD} = b.h$$

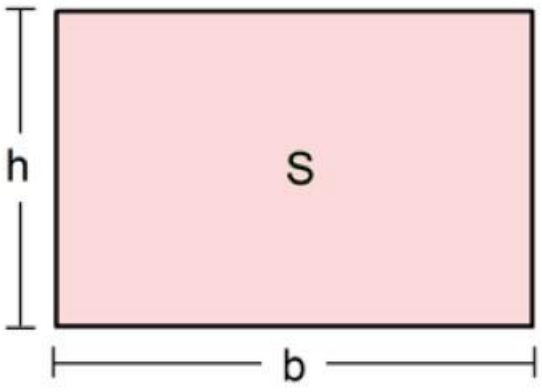


$$S_{ABCD} = a.n$$

NOTA: DEL CUADRADO Y DEL RECTÁNGULO



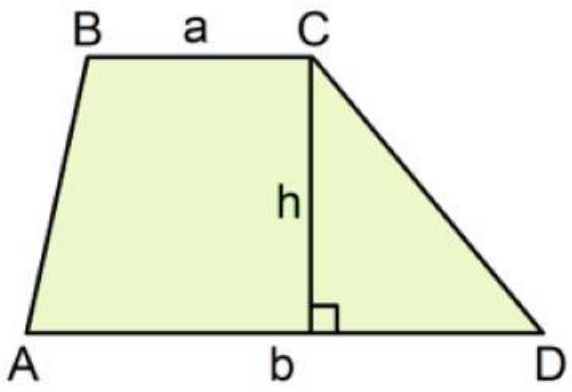
$$S = L^2$$



$$S = b.h$$

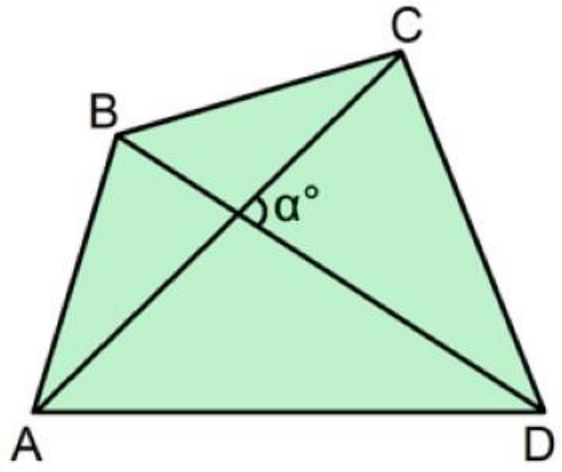
ÁREA DE REGIONES CUADRANGULARES

02.- DE UN TRAPECIO

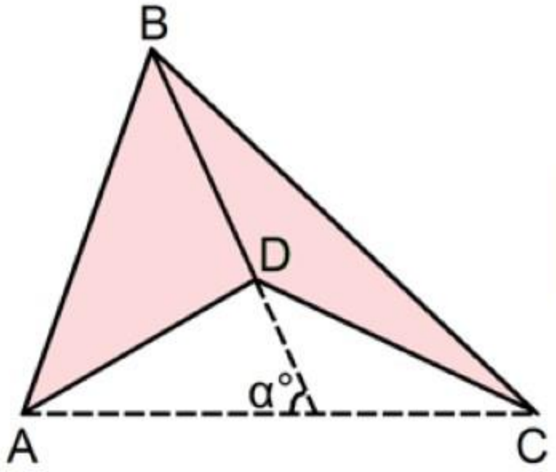


$$S_{ABCD} = \left(\frac{a+b}{2}\right).h$$

03.- DE UN CUADRILÁTERO CUALQUIERA

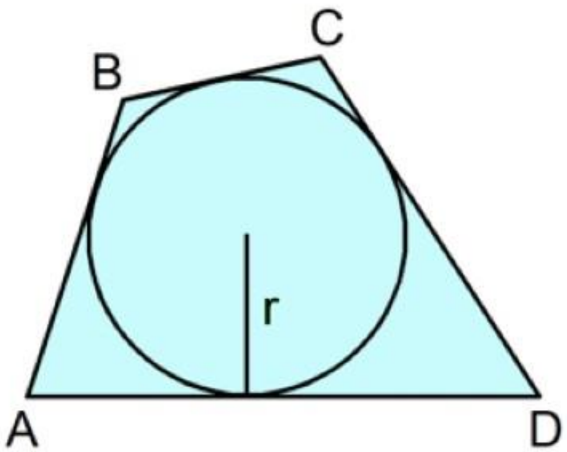


$$S_{ABCD} = \frac{AC.BD}{2}.\operatorname{sen}\alpha°$$



$$S_{ABCD} = \frac{AC.BD}{2}.\operatorname{sen}\alpha°$$

04.- DE UN CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO

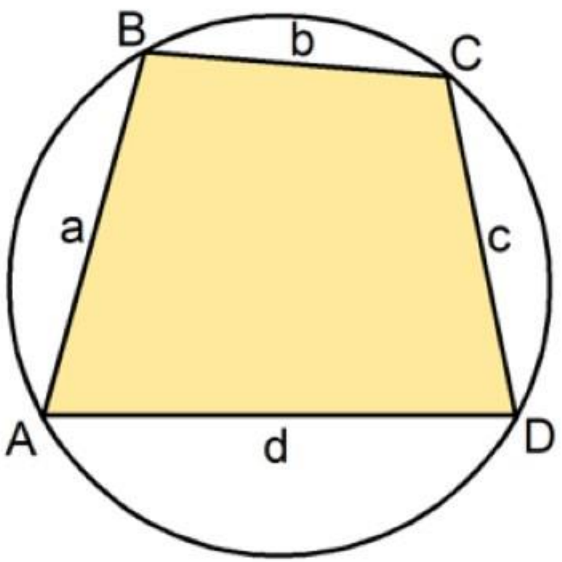


$$S_{ABCD} = p.r$$

p: semiperímetro del cuadrilátero ABCD

ÁREA DE REGIONES CUADRANGULARES

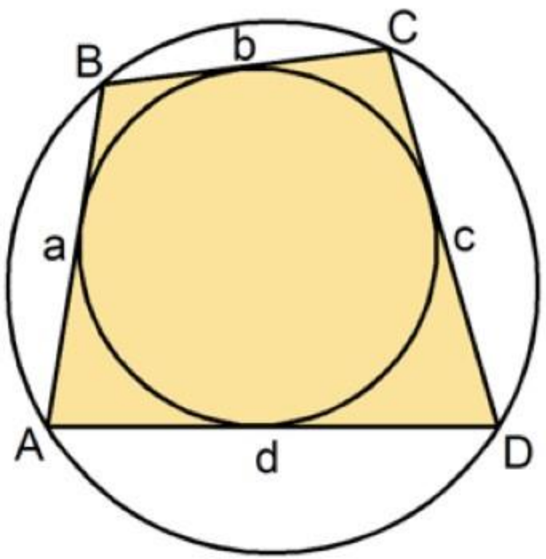
05.- DE UN CUADRILÁTERO INSCRITO



$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Donde: p es el semiperímetro

06.- DE UN CUADRILÁTERO INSCRITO Y CIRCUNSCRITO A LA VEZ

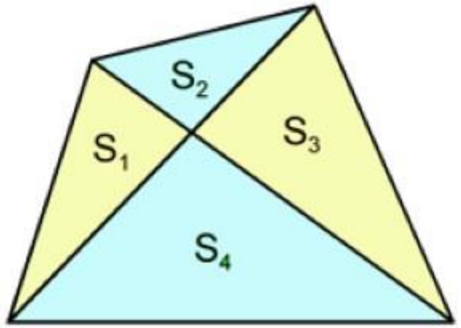


$$S_{ABCD} = \sqrt{a.b.c.d}$$

ÁREA DE REGIONES CUADRANGULARES

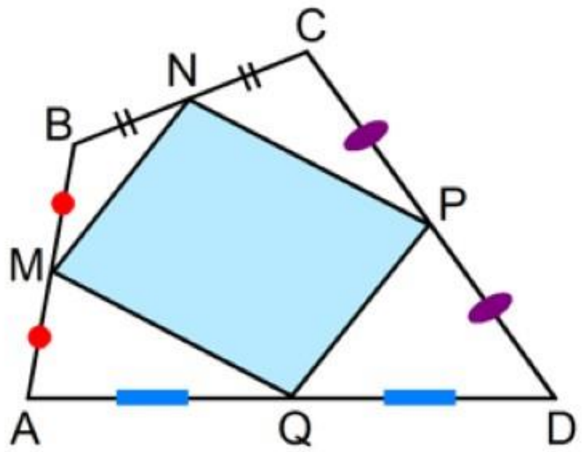
PROPIEDADES

01.-Para un cuadrilátero cualquiera:



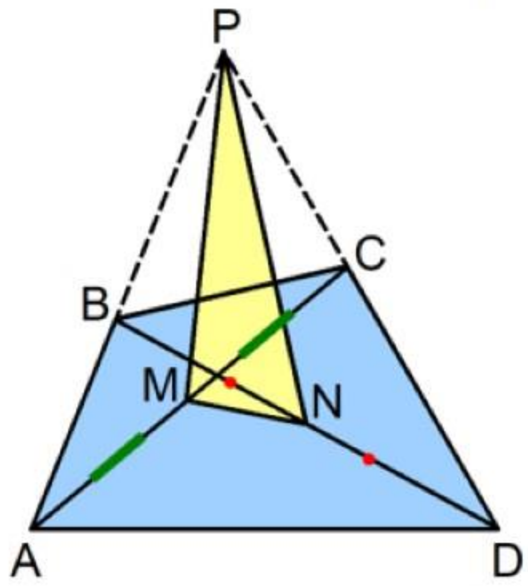
$$S_1 . S_3 = S_2 . S_4$$

02. Al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero se forma un paralelogramo, cuya área es la mitad del área del cuadrilátero dado.



$$S_{MNPQ} = \frac{S_{ABCD}}{2}$$

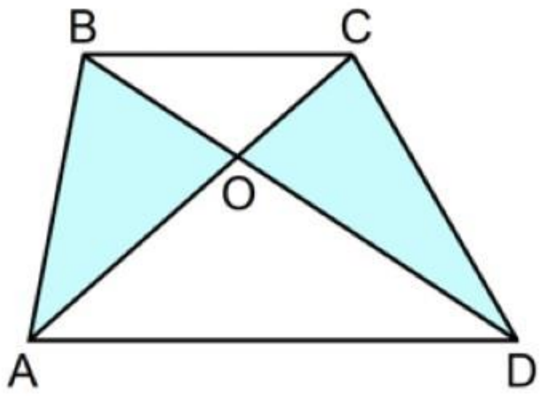
03. Si M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, entonces:



$$S_{MPN} = \frac{S_{ABCD}}{2}$$

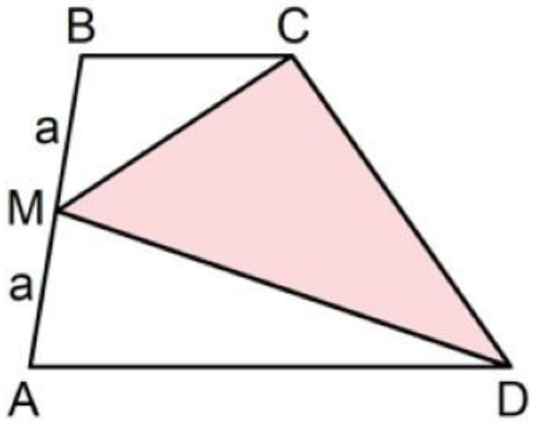
ÁREA DE REGIONES CUADRANGULARES

04. Si $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, entonces:



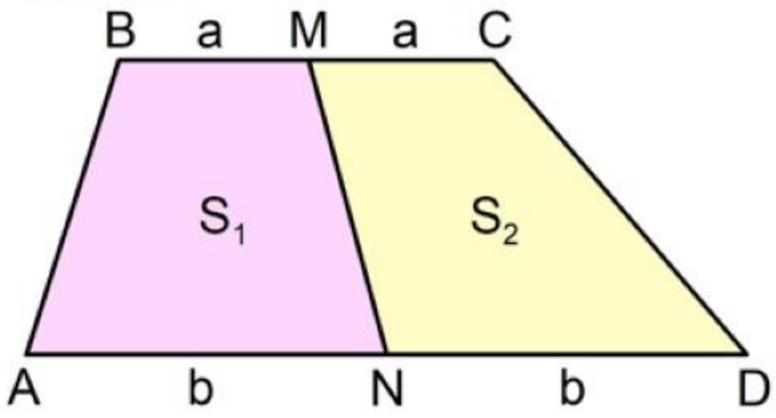
$$S_{AOB} = S_{COD}$$

05. Si $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y M es punto medio de $\overline{AB}$ entonces:



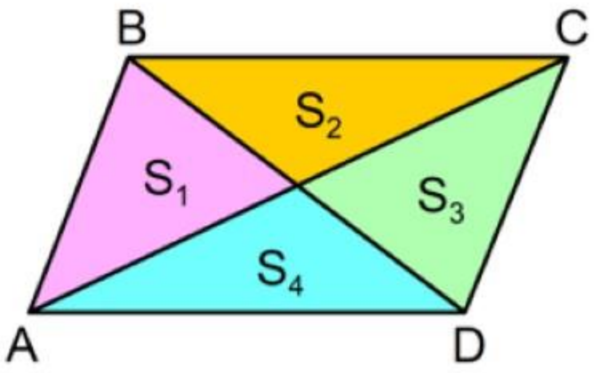
$$S_{MCD} = \frac{S_{ABCD}}{2}$$

06. Si $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ entonces:



$$S_1 = S_2$$

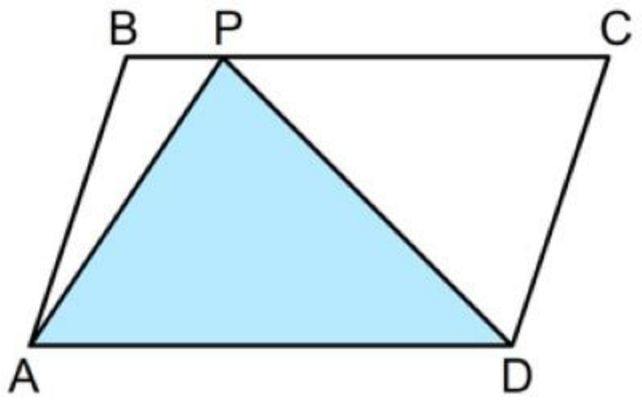
07. Si ABCD es un paralelogramo:



$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$$

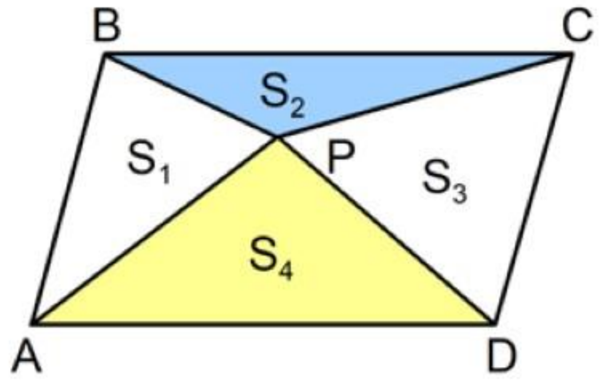
ÁREA DE REGIONES CUADRANGULARES

08. Si ABCD es un paralelogramo:



$$S_{APD} = \frac{S_{ABCD}}{2}$$

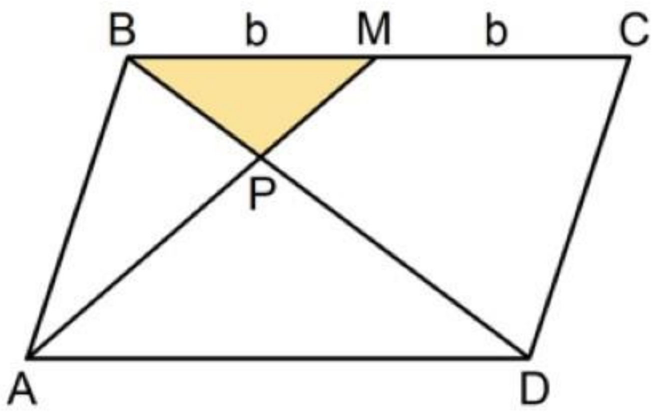
09. Si P es un punto interior al paralelogramo:



$$S_2 + S_4 = \frac{S_{ABCD}}{2}$$

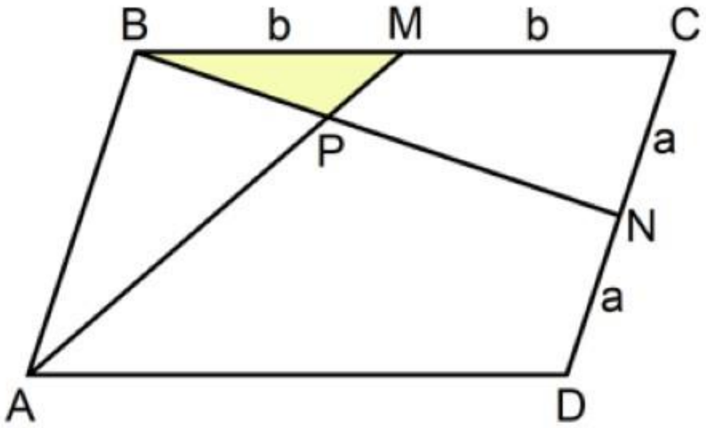
$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4$$

10. Si ABCD es un paralelogramo y M es punto medio de $\overline{BC}$, entonces:



$$S_{BPM} = \frac{S_{ABCD}}{12}$$

11. Si ABCD es un paralelogramo, M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, entonces:



$$S_{BPM} = \frac{S_{ABCD}}{20}$$

ÁREA DE REGIONES CUADRANGULARES

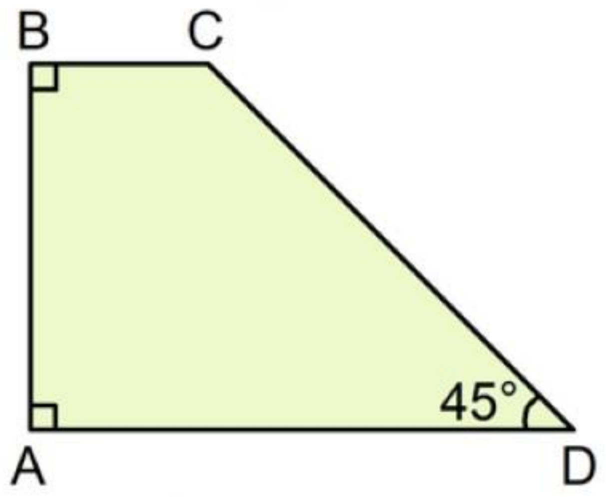
Ejemplo 01:

Dos lados de un paralelogramo miden 6 y 8, además una de sus alturas mide 7. Calcular el área de la región limitada por el paralelogramo

A) 42 B) 49 C) 56
D) 54 E) 42 ó 56

Ejemplo 02:

Calcular el área de la región limitada por el trapecio ABCD, si BC=2 y CD=$4\sqrt{2}$.

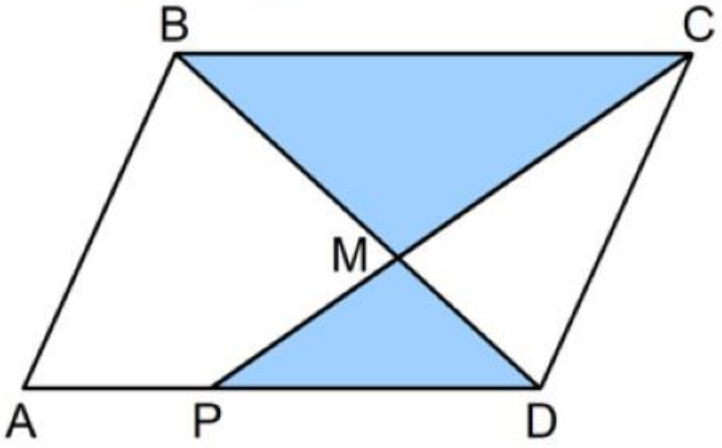


A) 20 B) 16 C) 12
D) 18 E) 24

ÁREA DE REGIONES CUADRANGULARES

Ejemplo 03:

Calcular el área de la región correspondiente al romboide ABCD, si las áreas de las regiones BMC y PMD son 9 y 4 respectivamente.



A) 26 B) 20 C) 30

C) 36 E) 28

Ejemplo 04:

Un terreno de forma rectangular y perímetro 46, tiene una diagonal que mide 17. Calcular el área del terreno.

A) 80 B) 144 C) 120

D) 135 E) 160

ÁREA DE REGIONES CUADRANGULARES

Ejemplo 05:

Calcular el área de la región limitada por un cuadrilátero inscrito, si sus lados miden 2; 3; 5 y 6.

A) $6\sqrt{2}$ B) 8 C) $6\sqrt{5}$
D) $5\sqrt{6}$ E) $4\sqrt{15}$

Ejemplo 06:

En un trapecio ABCD se conocen las medidas de las bases: BC=15 y AD=27. Sea P un punto de la base mayor $\overline{AD}$, tal que al unirlo con C resultan dos figuras equivalentes. Calcular AP.

A) 4 B) 5 C) 6
C) 7 E) 8

ÁREA DE REGIONES CUADRANGULARES

Ejemplo 07:

En el romboide ABCD, la semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ pasa por B e interseca a $\overline{BC}$ en P. Si BP=8 y PC=2, calcular el área de la región limitada por el romboide ABCD.

A) 16 B) 20 C) 25
D) 30 E) 40

Ejemplo 08:

Se tiene una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ en la cual se traza las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ no secantes. Si AC=10, BD=7 y la medida del ángulo que forman las rectas que contienen a las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ es 60, calcular el área de la región cuadrangular ACDB.

A) $54\sqrt{3}$ B) $45\sqrt{3}$ C) $36\sqrt{3}$
D) $27\sqrt{3}$ E) 54

ÁREA DE REGIONES CUADRANGULARES

Ejemplo 09:

Dado un cuadrilátero ABCD se sabe que las distancias del punto medio de $\overline{AB}$ a los puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ son 4, 5 y 3 respectivamente. Calcular el área de la región cuadrangular ABCD.

A) $12\sqrt{3}$ B) 30 C) 24
D) 36 E) 48

Ejemplo 10:

En un paralelogramo ABCD las diagonales se intersecan en O, además la m∠ABC=135. Si las distancias de O a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son 2 y 3, calcular el área de la región limitada por el paralelogramo ABCD.

A) $12\sqrt{2}$ B) $16\sqrt{2}$ C) $20\sqrt{2}$
D) $24\sqrt{2}$ E) $18\sqrt{2}$

Ejemplo 11:

Las bases de un trapecio isósceles circunscrito a una circunferencia miden 8 y 18. Calcular el área de la región limitada por el trapecio .

A) 144 B) 215 C) 156
D) 132 E) 182

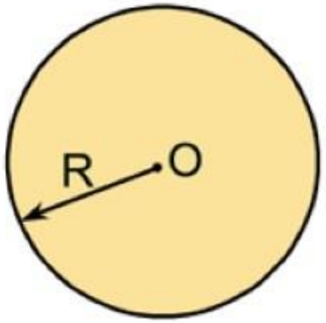
Ejemplo 12:

Desde los vértices de un triángulo, cuya región tiene área 18, se trazan perpendiculares a una recta exterior. Calcular el área de la región triangular formada al unir los puntos medios de dichas perpendiculares.

A) 6 B) 8 C) 9
D) 12 E) 15

ÁREA DEL CÍRCULO Y SUS PARTES

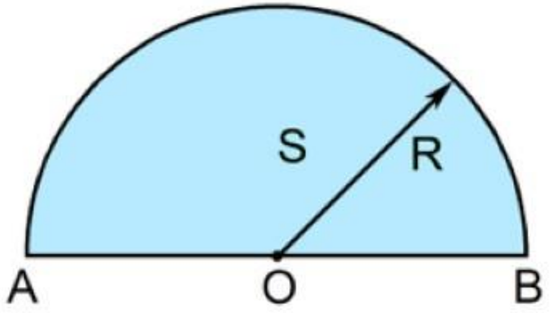
01.- ÁREA DEL CÍRCULO



$$S_{\odot} = \pi R^2$$

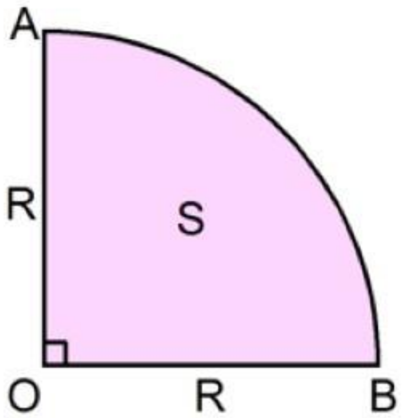
Consecuencias

a) Si $\overline{AB}$ es diámetro, entonces:



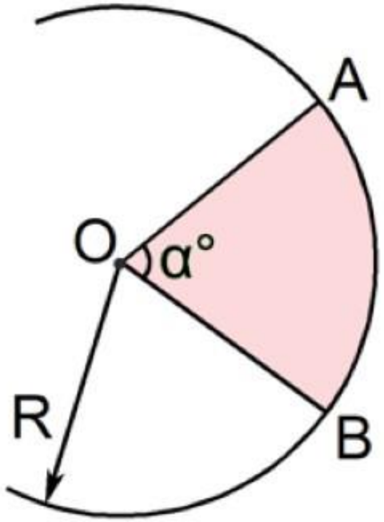
$$S = \frac{\pi R^2}{2}$$

b) En el cuadrante AOB:



$$S = \frac{\pi R^2}{4}$$

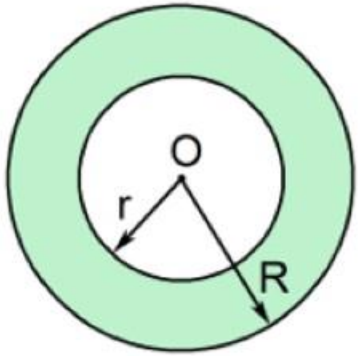
02.- ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR



$$S_{\text{Sector AOB}} = \pi R^2 \frac{\alpha}{360}$$

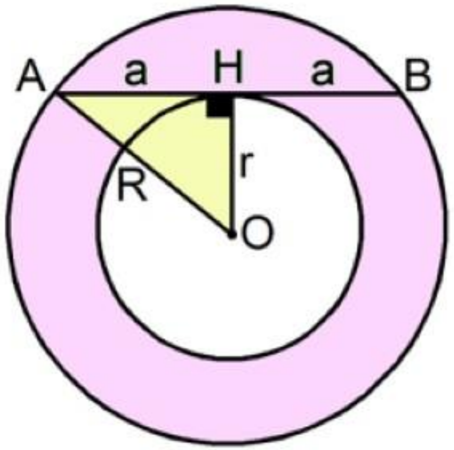
ÁREA DEL CÍRCULO Y SUS PARTES

03.- ÁREA DE LA CORONA CIRCULAR



$$S_{Corona} = \pi(R^2 - r^2)$$

Nota:



En el ΔAHO:

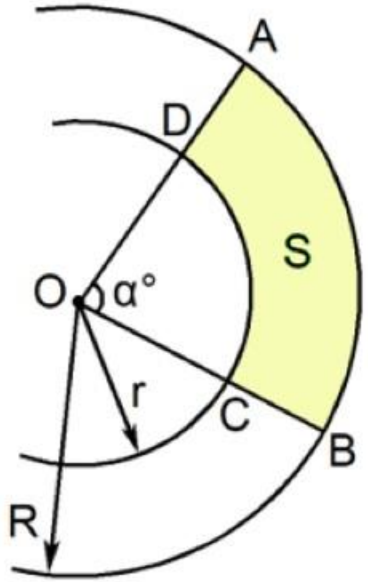
$$a^2 + r^2 = R^2$$

Luego:

$$a^2 = R^2 - r^2$$

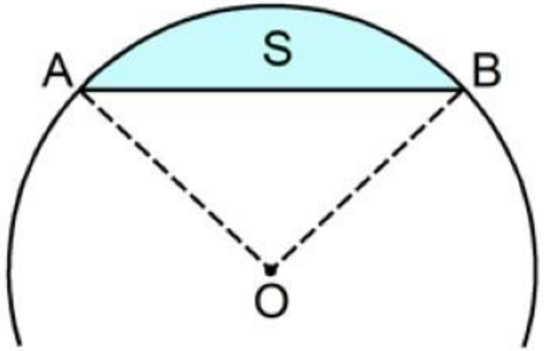
$$\therefore \quad S_{Corona} = \pi a^2$$

04.- ÁREA DEL TRAPECIO CIRCULAR



$$S = \pi(R^2 - r^2)\frac{\alpha}{360}$$

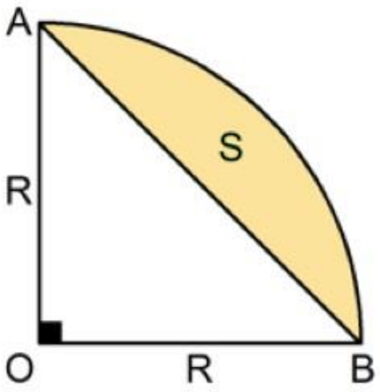
05.- ÁREA DEL SEGMENTO CIRCULAR



$$S = S_{Sector\ AOB} - S_{\Delta AOB}$$

ÁREA DEL CÍRCULO Y SUS PARTES

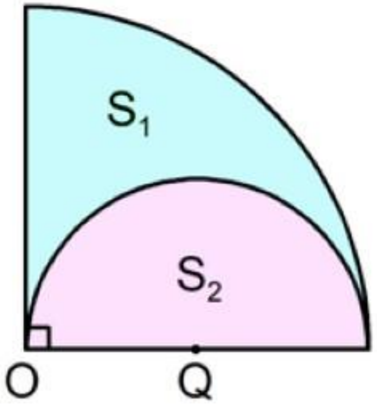
Consecuencia:



$$S = \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$$

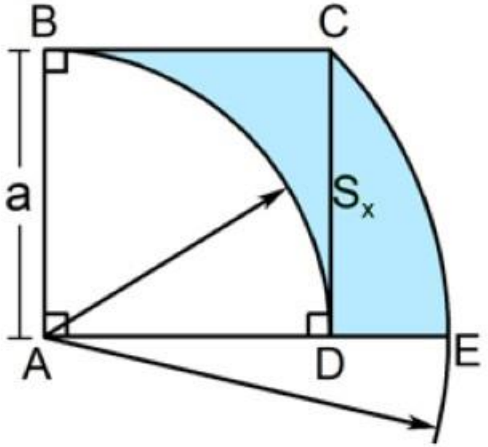
PROPIEDADES

01.- En la figura O y Q son centros, entonces:



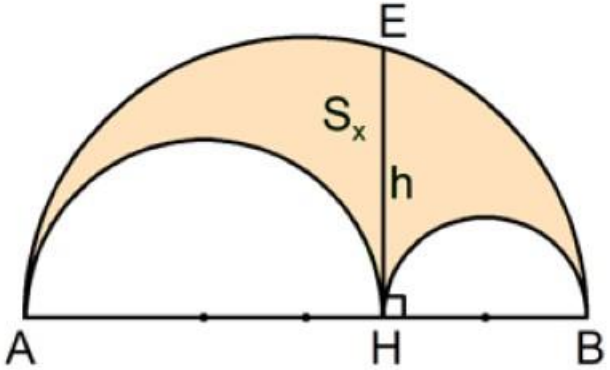
$$S_1 = S_2$$

02.- ABCD es un cuadrado, A es centro de los arcos BD y CE, entonces:



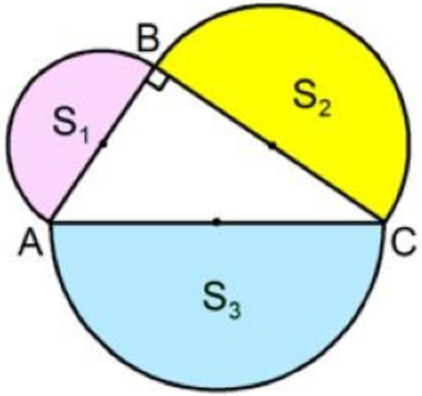
$$S_x = \frac{a^2}{2}$$

03. $\overline{AB}$, $\overline{AH}$ y $\overline{HB}$ son diámetros, entonces:



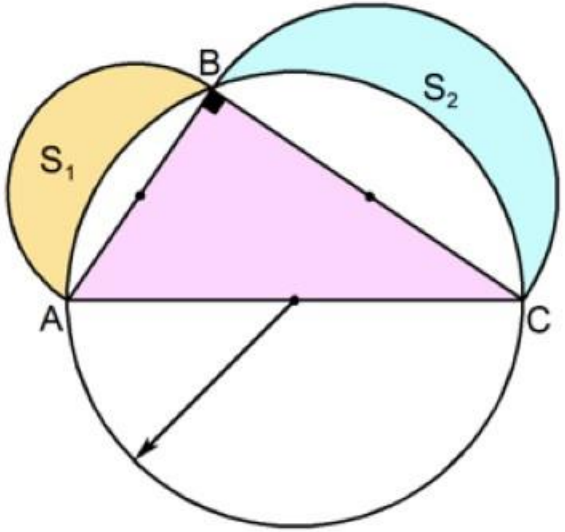
$$S_x = \frac{\pi h^2}{4}$$

04. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son diámetros, entonces:



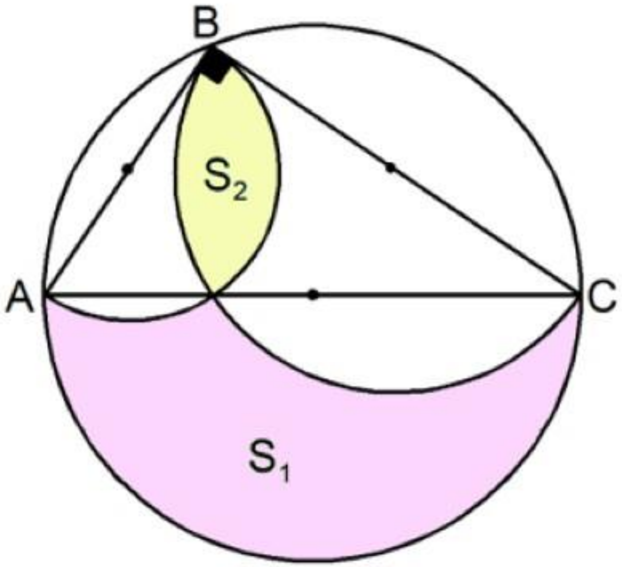
$$S_3 = S_1 + S_2$$

LÚNULAS DE HIPÓCRATES



$$S_{\Delta ABC} = S_1 + S_2$$

PROPIEDAD

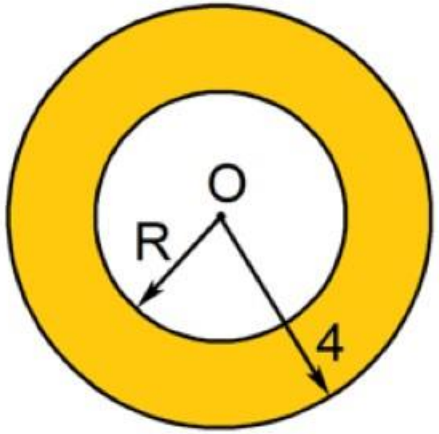


$$S_{\Delta ABC} = S_1 - S_2$$

ÁREA DEL CÍRCULO Y SUS PARTES

Ejemplo 13:

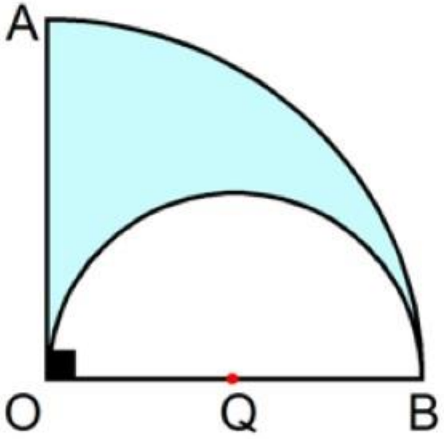
Calcular el valor de R, si el área de la región sombreada es igual al área de la región no sombreada.



A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) 1
D) 2 E) 3

Ejemplo 14:

Calcular el área de la región sombreada, si OB=4. (O y Q son centros)



A) π B) 2π C) 3π
D) 4π E) 6π

RAZÓN DE ÁREAS

Ejemplo 15:

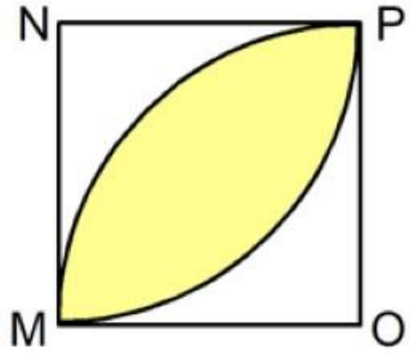
Calcular el área del circulo inscrito en un triángulo equilátero cuyo lado mide 6.

A) π B) 4 π C) 2 π

D) 3 π E) 2π/3

Ejemplo 16:

Si MNPO es un cuadrado cuyo lado mide “a”, calcular el área de la región sombreada.



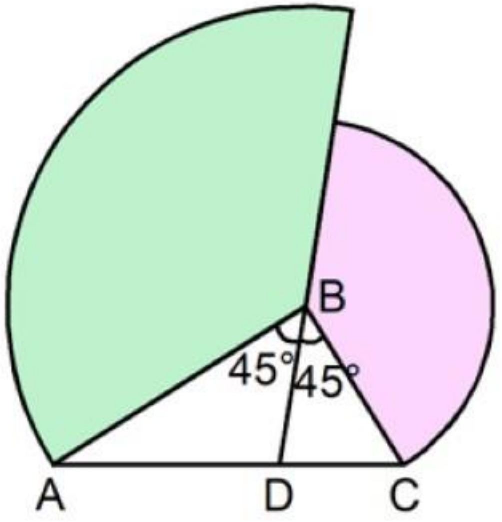
A) $a^2(\pi - 2)$ B) $\frac{a^2}{2}(\pi - 2)$ C) $a^2(4 - \pi)$

D) $\frac{a^2}{2}(4 - \pi)$ E) $\frac{a^2}{3}(\pi - 2)$

RAZÓN DE ÁREAS

Ejemplo 17:

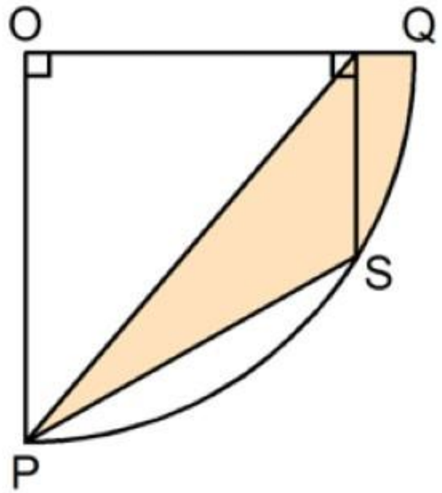
Calcular el área de la región sombreada, si $AC=2\sqrt{2}$ y B es centro.



A) 2π B) 3π C) 4π
D) 6π E) 8π

Ejemplo 18:

Calcular el área de la región sombreada si OP=OQ=PS=6 y O es centro.



A) π B) 2π C) 3π
D) 4π E) 6π

RAZÓN DE ÁREAS

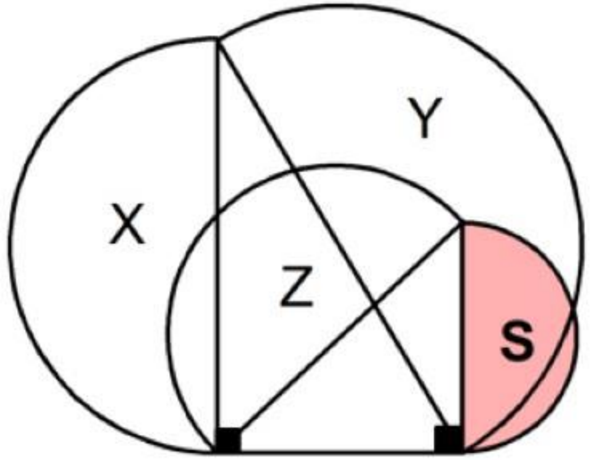
Ejemplo 19:

Se tiene un sector circular equivalente a un cuadrado cuyo lado mide igual que la longitud de arco del sector. Calcular el área del sector, si su radio mide 18.

A) 81 B) 36 C) 36π
D) 9π E) 81π

Ejemplo 20:

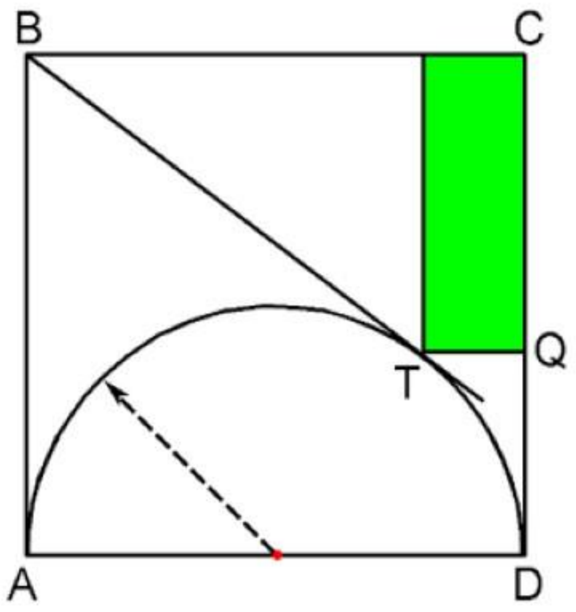
Calcular el valor del área S, del semicírculo sombreado, si las áreas de los demás semicírculos son: X, Y, Z.



A) Y – X + Z B) 2Y - X - Z C) X + Y - Z
D) X + Z - Y E) 2Z + X - Y

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 10 y T es punto de tangencia, calcular el área de la región rectangular sombreada.



A) 12 B) 10 C) 18
D) 16 E) 20

Resolución:

Recuerde que al unir el centro O de la semicircunferencia con el punto B, el ángulo ABO mide 53/2. Luego: m∠ABT=53.

Rpta. A

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

02. Calcular el área de la región correspondiente a un rombo, si las proyecciones de sus diagonales sobre uno de sus lados miden a y b (a > b).

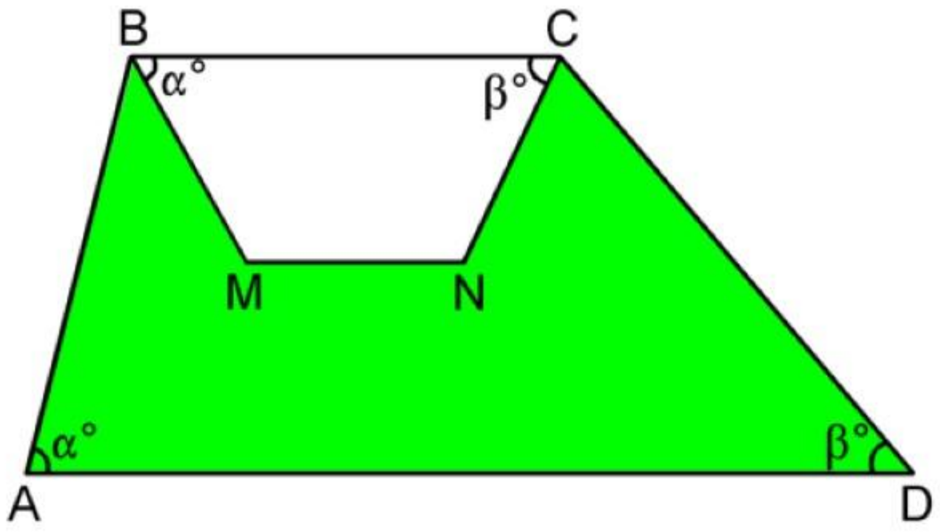
A) $\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}$ B) $\frac{ab}{2}$ C) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$

D) $\frac{ab^2}{a+b}$ E) $(a-b)\sqrt{ab}$

Resolución:

Rpta. A

03. En la figura: $\overline{BC} \parallel \overline{MN} \parallel \overline{AD}$; MN=2, BC=4, AD=8 y S_{BCNM}=20. Calcular el área de la región sombreada.



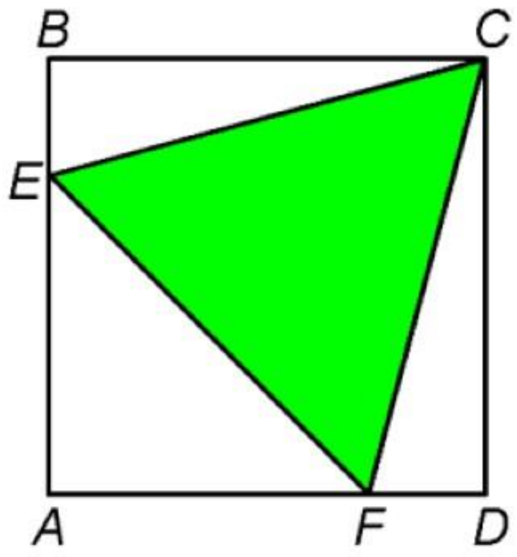
A) 40 B) 60 C) 30

D) 80 E) 70

Resolución:

Rpta. B

04. Si ABCD es un cuadrado y CEF es un triángulo equilátero, entonces el valor de $\frac{\text{área CEF}}{\text{área ABCD}}$ es igual a:



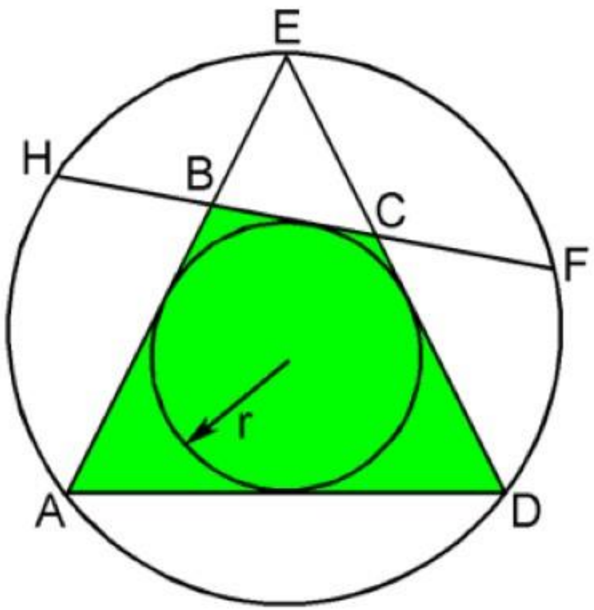
A) $\sqrt{2}-1$ B) $\sqrt{3}-1$ C) $2\sqrt{3}-3$

D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (UNI 2012-2)

Resolución:

Rpta. C

05. Si $m\widehat{HE} = m\widehat{EF}$; AB=4, BC=3 y $S_{ABCD} = 6\sqrt{10}$; calcular el valor de r.



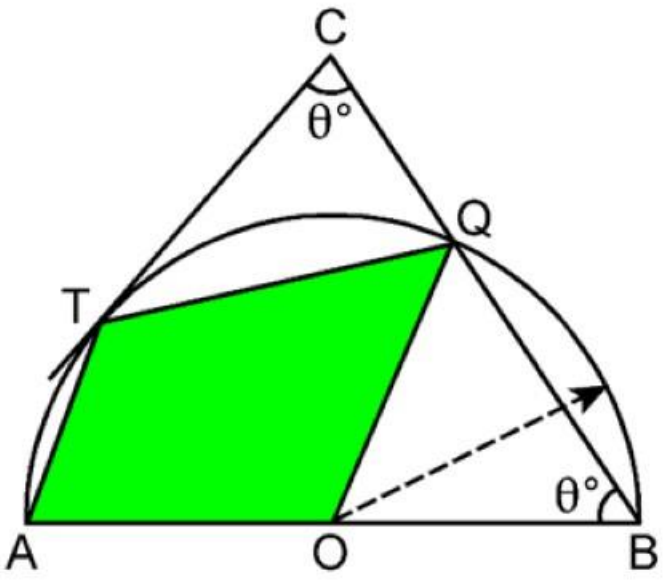
A) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ B) 10 C) $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

D) $2\sqrt{10}$ E) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

Resolución:

Rpta. C

06. En la figura O es centro y T es punto de tangencia. Si AQ=8, calcular el área de la región sombreada.



A) 16 B) 8 C) 4
D) 22 E) 24

Resolución:

Rpta. A

07. El perímetro de un trapecio es igual a 52, además la base menor mide 1. Calcular el área de la región limitada por el trapecio, si sus diagonales están contenidas en las bisectrices de los ángulos obtusos.

A) 120 B) 105 C) 135

D) 140 E) 115

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

08. En un triángulo, el área de la región circular determinada por la circunferencia inscrita es 9π u^2. Si el área de la región triangular es $\frac{9(\sqrt{2}+2)^2}{2}$ u^2, determine el perímetro del triángulo.

A) $6(1+\sqrt{2})$ u

B) $6(1+2\sqrt{2})$ u

C) $6(2+\sqrt{2})$ u

D) $6(2+2\sqrt{2})$ u

E) $6(3+2\sqrt{2})$ u (UNI 2010-1)

Resolución:

Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

09. En un triángulo acutángulo ABC cuyo ortocentro es el punto N e inscrito en una circunferencia de diámetro $\overline{AD}$, se traza la altura $\overline{BH}$. Calcular el área de la región cuadrangular BNCD, si BN=6 y HC=8.

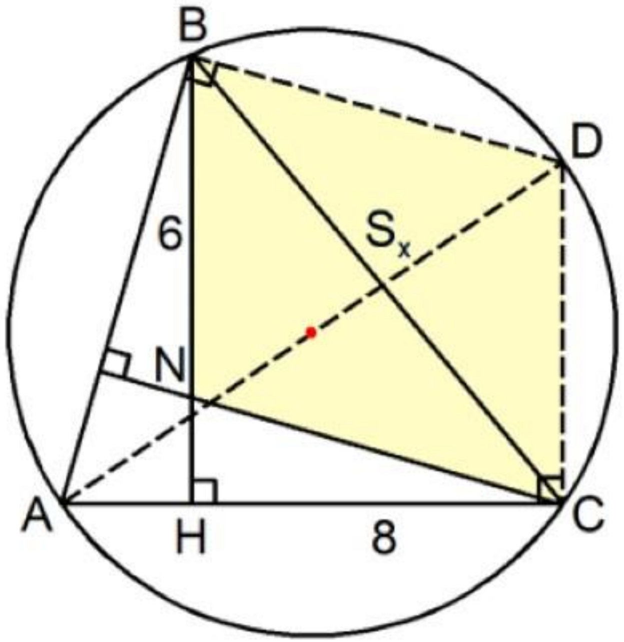
A) 24 B) 36 C) 48

D) 56 E) 72

Resolución:

Observe que los ángulos ABD y ACD son rectos ($\overline{AD}$ es diámetro), entonces $\overline{BH} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{CN} \parallel \overline{DB}$.

$\rightarrow$ ☐NBDC: Paralelogramo

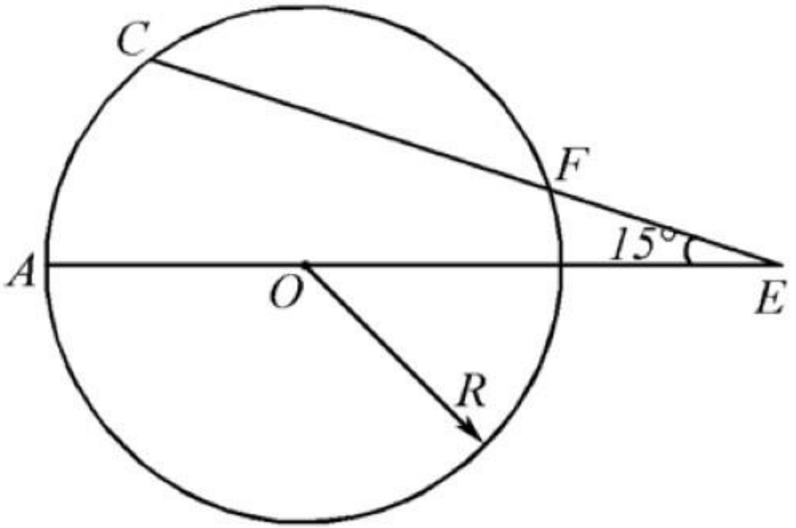


Finalmente:

$$S_{BNCD} = 6.8$$

$$\therefore S_{BNCD} = 48 \qquad \text{Rpta. C}$$

10. en la figura O es centro de la circunferencia cuyo radio mide R unidades. Si AO=FE y $m\angle CEA = 15$, entonces el área del sector circular AOC es a la longitud de la circunferencia como:



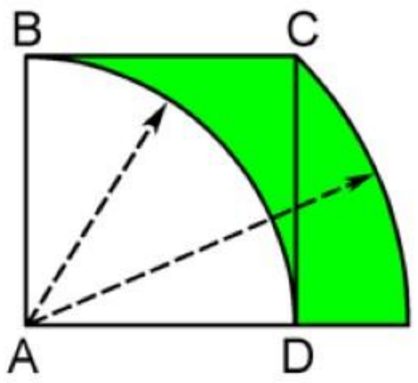
A) $\frac{R}{2}$ B) $\frac{R}{14}$ C) $\frac{R}{15}$

D) $\frac{R}{16}$ E) $\frac{R}{18}$ (UNI 2013-1)

Resolución:

Rpta. D

11. Calcular el área de la región sombreada, si AB=10

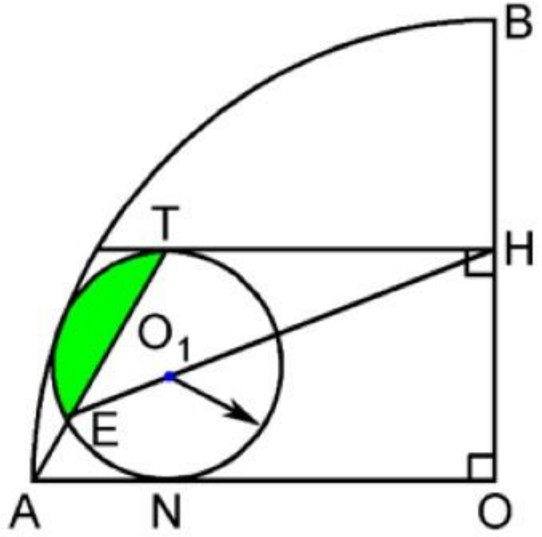


A) 25 B) 30 C) 40
D) 50 E) 100

Resolución:

Rpta. D

12. Calcular el área de la región sombreada. Si $NO = \sqrt{3}$ y EH=3.



A) $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{3\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{3\pi}{4} - \sqrt{2}$ E) $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

Resolución:

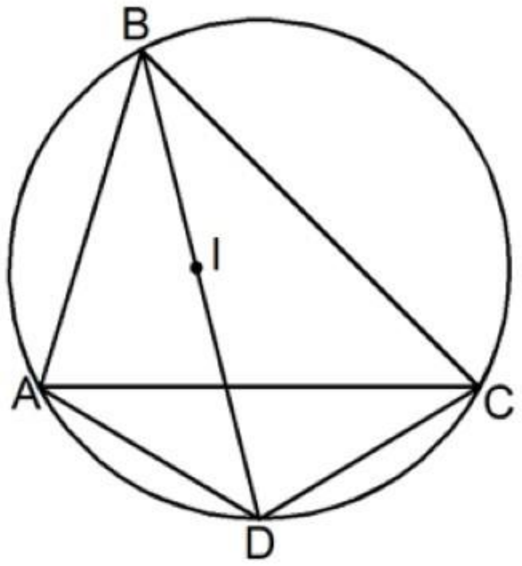
Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

13. En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BE}$, donde I es el incentro del triángulo ABC. Si BI=6 y EI=2 calcular el área del círculo limitado por la circunferencia que contiene a los puntos I, A y C

A) 9π B) 12π C) 18π
D) 8π E) 16π

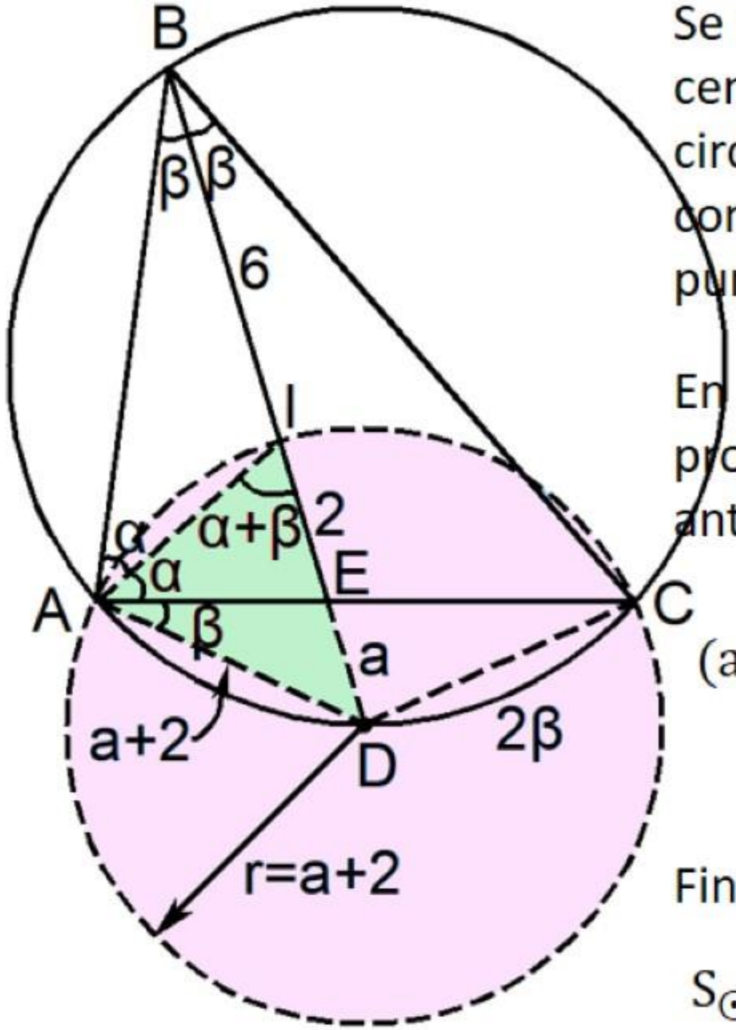
Resolución:



Recordar:

Si I es Incentro

→ DA=DI=DC



Se observa que D es centro de la circunferencia que contiene a los puntos A, I y C.

En el ΔADB, por propiedad de las antiparalelas:

$$(a+2)^2 = (a+8).a$$

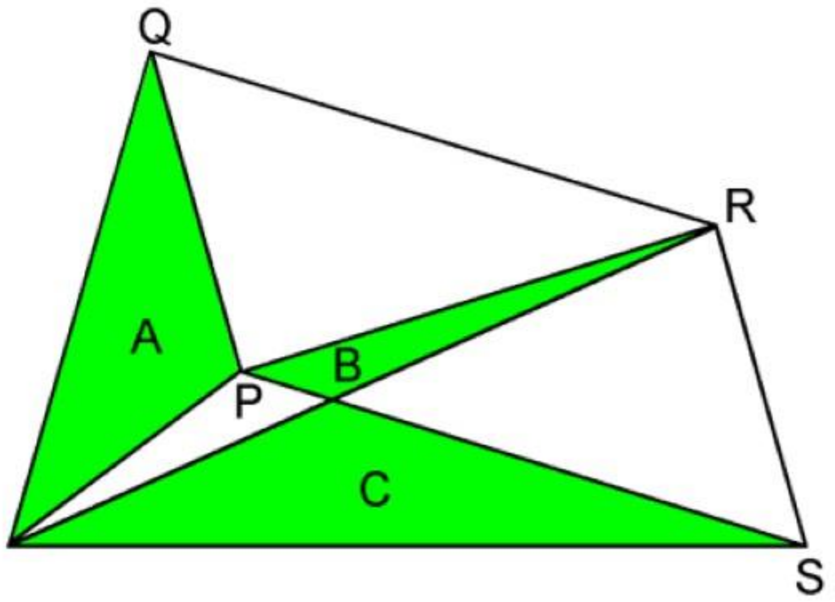
$$a = 1$$

Finalmente, se pide:

$$S_{\odot} = \pi.r^2 = \pi.3^2$$

$$\therefore S_{\odot} = 9\pi \qquad \text{Rpta. A}$$

14. Si PQRS es un paralelogramo, A, B y C son las áreas de las regiones sombreadas, determinar la relación entre A, B y C.



A) A + B = C B) A - B = C C) $\sqrt{AB} = 2C$

D) $\sqrt{AB} = C$ E) $\sqrt{A} + B = C$

Resolución:

Rpta. A

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

15. En un cuadrilátero convexo ABCD, por A se traza una recta secante a $\overline{\mathrm{CD}}$ en M, luego por B se traza una recta paralela a $\overline{\mathrm{AC}}$ que se interseca con la prolongación de $\overline{\mathrm{DC}}$ en N. Si CM=a, MD=b y las regiones determinadas con respecto al cuadrilátero por la primera recta son equivalentes, calcule NC.

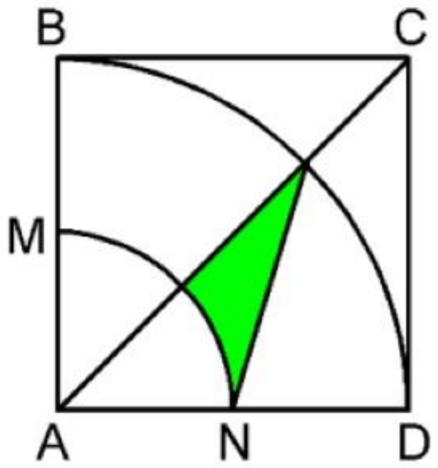
A) b - 2a B) b - a C) b + a

D) 2b - a E) $\frac{\mathrm{b-a}}{2}$

Resolución:

Rpta. B

16. En la figura ABCD es un cuadrado; AM=BM=AN=ND=2. Calcular el área de la región sombreada:



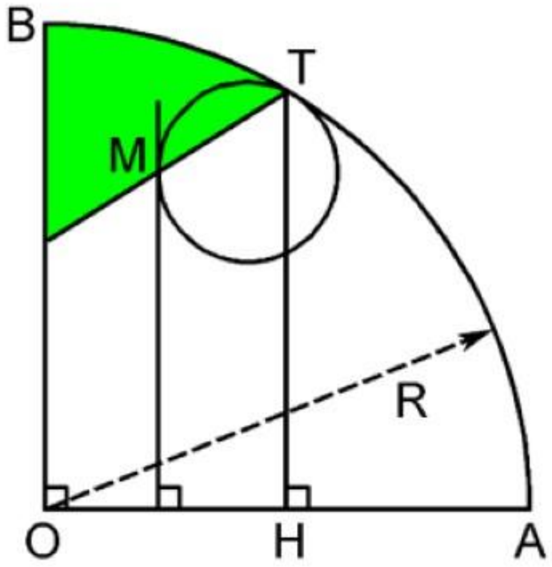
A) $2\sqrt{2}-\pi$ B) $\frac{3\sqrt{2}-\pi}{3}$ C) $\frac{3\sqrt{2}-\pi}{4}$

D) $\frac{4\sqrt{2}-\pi}{2}$ E) $\frac{2\sqrt{2}-\pi}{2}$

Resolución:

Rpta. D

17. En el gráfico T y M son puntos de tangencia, OH=HA. Calcular el área de la región sombreada en función de R.



A) $\frac{R^2}{12}(\pi-\sqrt{2})$ B) $\frac{R^2}{12}(\pi-\sqrt{3})$ C) $\frac{R^2}{8}(3\pi-4)$

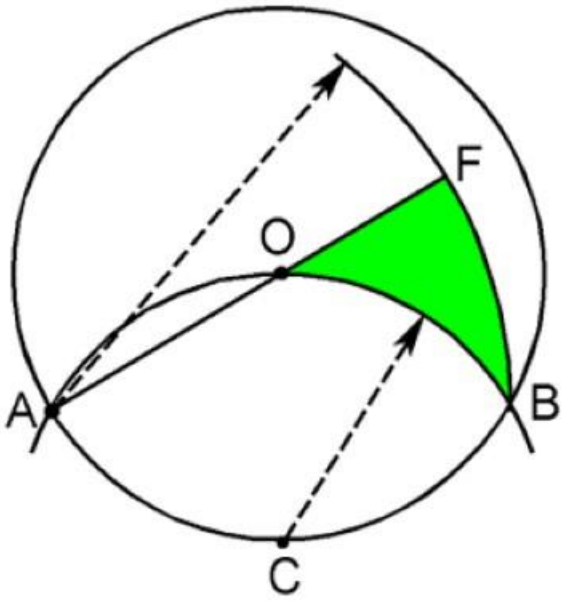
D) $\frac{R^2}{6}(\pi-\sqrt{3})$ E) $\frac{R^2}{10}(2\pi-\sqrt{3})$

Resolución:

Complete la semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$, luego recuerde la propiedad: T, M y C son colineales (ver circunferencia).

Rpta. B

18. En la figura C, A y O son centros del arco AB, del arco BF y de la circunferencia. Calcular el área de la región sombreada. (OA=R)



A) $\frac{\pi R^2}{8}$ B) $\frac{\pi R^2}{9}$ C) $\frac{\pi R^2}{10}$

D) $\frac{\pi R^2}{11}$ E) $\frac{\pi R^2}{12}$

Resolución:

Rpta. E

19. En un paralelogramo ABCD, en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos M y N respectivamente tal que AM=MB y $\overline{MC} \cap \overline{ND} = \{P\}$. Si $m\angle ADN = m\angle BCD$, 3(CD)=5(PD) y el área de la región MPD es igual a 9 u^2, calcular el área de la región cuadrangular ABND.

A) 32 u^2 B) 36 u^2 C) 30 u^2

D) 20 u^2 E) 27 u^2

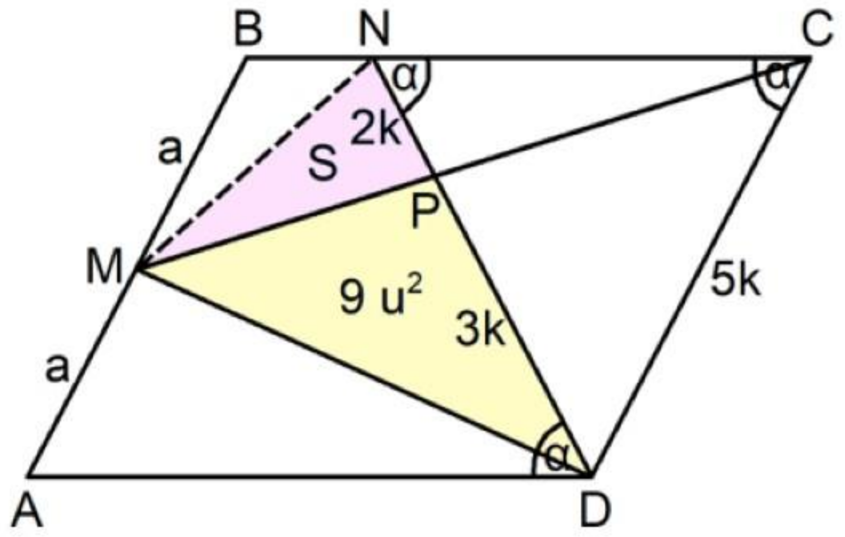
Resolución:

Por dato: CD=5k y PD=3k

Por ángulos alternos internos:

$$m\angle ADN = m\angle DNC = \alpha$$

$\rightarrow$ DC=DC=5k y PN=2k



EnΔDMN: $\dfrac{S}{9\,u^2} = \dfrac{2k}{3k} \rightarrow S = 6\,u^2$

Finalmente, por propiedad, en el trapecio ABND:

$$S_{DMN} = \frac{S_{ABND}}{2} \rightarrow 15\,u^2 = \frac{S_{ABND}}{2}$$

$$\therefore S_{ABND} = 30\,u^2 \qquad \text{Rpta. C}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

20. Se tiene dos cuadrados ABCD y CPEF, donde F es interior al cuadrado ABCD y E es exterior y relativo al lado $\overline{CD}$, tal que $\overline{EF}$ interseca a $\overline{CD}$. Calcular el área de la región cuadrangular AFED, si AB=a y CP=b.

A) $\frac{a^2+b^2}{3}$ B) $\frac{a^2-b^2}{3}$ C) $\frac{a^2+b^2}{2}$

D) $\frac{a^2-b^2}{2}$ E) $\frac{b\sqrt{ab}}{2}$

Resolución:

Rpta. D

FIN

MUCHAS GRACIAS